Lycée Sainte Marie de Cocody
Terminales D

DST de MATHEMATIQUES

Mercredi 19 Mars 2014
Durée : 4 heures

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par $f(x) = \frac{16x}{(x^2-4)^2}\ln(x)$

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_4^8 f(x)dx = \frac{14}{15}\ln(2) + \int_4^8 \frac{8}{x(x^2-4)}dx$

2) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in [3;+\infty[$; $\frac{8}{x(x^2-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$

3) En déduire qu'une primitive de : $x \mapsto \frac{8}{x(x^2-4)}$ sur $[3;+\infty[$ est : $x \mapsto ln\left(1-\frac{4}{x^2}\right)$

4) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\int_4^8 f(x)dx$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O ,I ; J)

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 16i - 8$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.
2) Déterminer le polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-2i)Q(z)$
3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
4) Soient A ,B et C les points d'affixes $z_A = 3+i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2-2i$
   a) Placer les points A, B et C
   b) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle
   c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD est un parallélogramme puis construire D
5) Soit E le symétrique de A par rapport au milieu de [BC]
   a) Justifier que l'affixe de E est $-1-i$
   b) Montrer que ABEC est un carré
   c) Montrer que les points E, C et D sont alignés

6) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|-\frac{1}{2}i\bar{z} - 1 + i\right| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

   a) Les points E, D , A et B appartiennent-ils à (Γ) ? Justifier chaque réponse.

   b) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z-2+2i| = \sqrt{10}$

   c) En déduire l'ensemble (Γ) et construire (Γ).

7) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E ') : $z^4 = 8(-1 + i\sqrt{3})$. On donnera les solutions de (E ') sous la forme exponentielle.

b) Représenter dans un autre repère (O, I, J) d'unité 2cm , les points images des solutions de (E ')

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur IR par $g(x) = 2x + 3 - e^{-x-1}$.

1) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Calculer $g(-1)$ et déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

Partie B

Soit la fonction f définie et dérivable sur IR par $f(x) = -x - 1 + (2x + 1)\, e^{x+1}$

(C_f) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O , I , J) avec OI = 2 cm et OJ = 1 cm

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote en $-\infty$ à (C_f) .
   c) Etudier les positions de (Δ) et (C_f).

2) Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

3) a) Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)\, e^{x+1}$
   b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4)a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

b) Justifier que $f'(\alpha) < f'(\beta)$ et que les tangentes à (C_f) aux points d'abscisses α et β sont des droites sécantes.

c) Justifier que $g(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1.

6) Tracer sur $[-5\,;\,1]$ avec soin (Δ), (T) et (C_f).

7) Soit h et H les fonctions definies par $h(x) = (2x + 1)\, e^{x+1}$ et $H(x) = (ax + b)\, e^{x+1}$
   a) Déterminer les constantes a et b pour que H soit une primitive sur IR de h .

   b) En déduire le calcul de l'intégrale $\int_{-4}^{-1} f(x)\, dx$.